

ANALYSE THERMIQUE D'UN MUR COMPOSITE SOUMIS SUR UNE FACE A UNE VARIATION EN CRENEAUX DE LA TEMPERATURE

PIERRE DUHAMEL et JEAN GOSSE

Laboratoire de Thermique du CNAM, 292, rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France

(Received 14 July 1980)

Résumé — On exploite une méthode analytique [1] basée sur la technique de séparation des variables pour résoudre le problème de la conduction thermique variable dans un mur composite à propriétés thermophysiques constantes; chaque valeur propre est la même pour toutes les tranches du mur. On étudie le cas d'un four à fonctionnement intermittent avec deux types de mur de même résistance thermique globale et de capacités thermiques très peu différentes. L'un des murs est entièrement en fibres céramiques. On considère pour chaque mur l'influence de l'arrangement des tranches, entre la face chaude et la froide, sur les flux de chaleur qui traversent ces faces. On constate que le mur entièrement en fibres n'est pas le plus efficace sous l'angle des économies d'énergie.

NOMENCLATURE

a_i , diffusivité thermique;	(Λ) , lettre désignant un mur léger;
A_k, A_{ik} , coefficients de développements sur une base de fonctions propres;	μ_k , valeur propre;
c_i , chaleur massique de la tranche i ;	η_{ik} , coefficient du produit, limité à i , des matrices caractéristiques des tranches;
e_i , épaisseur de la tranche i ;	ρ_i , masse volumique de la tranche i ;
E , énergie;	$\theta_i(x_i, t)$, température réduite $\theta_i = T_i/\Delta T$;
$E_{i,p,t}$, énergie entrant par la face 1 entre les instants t_p et t ;	$\theta_{\infty 1}$, température réduite loin de la face interne;
h_1, h_n , conductances surfaciques sur les faces extrêmes;	$\Theta_i(x_i, t)$, température réduite solution d'un problème homogène;
H , conductance globale du mur;	$\Theta_{ik}(x_i, t)$, solution élémentaire d'un problème homogène;
$P_{i,p,t}$, énergie sortant par la face n entre les instants t_p et t ;	ξ_{ik} , coefficient du produit, limité à i , des matrices caractéristiques des tranches;
$s_i(x_i)$, solution stationnaire;	ζ_{ik} , coefficient du produit, limité à i , des matrices caractéristiques des tranches;
$S_{i,p,t}$, énergie stockée entre les instants t_p et t ;	$'$, grandeur dimensionnée à l'exception des températures T ;
t , temps;	p , grandeur restreinte à la séquence p ;
t_I , instant initial;	i , indice relatif à une tranche;
t_p , instant origine de la séquence p ;	k , indice relatif à une valeur propre.
T_N, T_V , température nominale, température de veille;	
$T_i(x_i, t)$, température au point x_i de la tranche i , à l'instant t ;	
$T_{\infty 1}, T_{\infty n}$, températures loin des faces extrêmes;	
x_i , abscisse;	
$X_{ik}(x_i)$, fonction propre;	
β_i , $\beta_i = (a_i'/a_i)^{1/2} \lambda_i'/e_i H'$;	
ΔT , $\Delta T = T_N - T_V$;	
ϕ_i , densité de flux;	
ϕ_{st} , densité de flux en régime stationnaire;	
Φ_i, Φ_{ik} , densités de flux du problème à conditions aux limites homogènes;	
Y , fonction échelon de Heaviside;	
γ , facteur d'alternance (ou d'intermittence);	
(Γ) , lettre désignant un mur lourd;	
χ_{ik} , coefficient du produit, limité à i , des matrices caractéristiques des tranches;	
λ_i , conductivité thermique;	

1. INTRODUCTION

L'OBTENTION de parois possédant de bonnes qualités d'isolation thermique conduit à la réalisation de parois composites dont les couches élémentaires ont préférentiellement des propriétés soit de résistance mécanique à l'écrasement, soit de résistance à la conduction de la chaleur. La nécessité accrue d'économie d'énergie exige l'étude détaillée des performances thermiques en régime de conduction variable, dans les conditions d'emploi.

Les méthodes purement numériques (par différences ou par éléments finis) se prêtent à la résolution des problèmes de régime variable en tenant éventuellement compte des variations des paramètres thermophysiques en fonction de la température. Mais elles sont lourdes à mettre en oeuvre dans un petit bureau

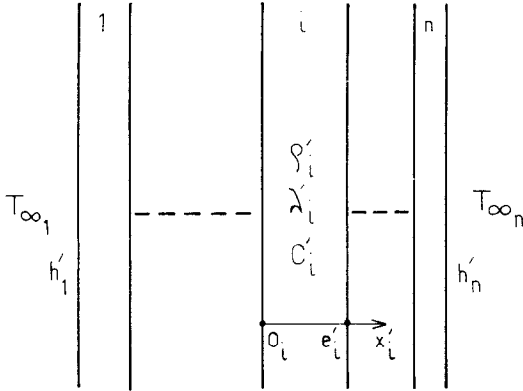


FIG. 1. Schéma du mur composite.

d'études. La méthode analytique présentée en [1], limitée au cas des propriétés constantes, n'est pas du tout pénalisée par un grand nombre de tranches et elle s'accommode très bien de développements numériques.

Cette méthode analytique est appliquée ici à l'étude d'une paroi composite de four à fonctionnement discontinu, du type four de traitement thermique.

2. METHODE ANALYTIQUE D'ETUDE DES REGIMES VARIABLES

2.1. Présentation du problème général

Soit un mur composé de n tranches contiguës (Fig. 1). Chaque tranche i d'épaisseur e'_i possède ses propres constantes thermophysiques (masse volumique ρ'_i , conductivité λ'_i , chaleur massique c'_i); on désigne par a'_i la diffusivité thermique de cette tranche. On suppose ici l'absence de résistance de contact aux interfaces. Les conductances surfaciques des faces extrêmes sont respectivement h'_1 (face 1) et h'_n (face n). Enfin, la température du mur à l'instant initial t'_i est telle que $T_i(x'_i, t'_i) = T'_i(x'_i)$.

2.2. Rappels sur la méthode [1]

Soit les changements de variables :

$$x_i = (a'_i/a'_1)^{1/2} (x'_i/e'_1); \quad t = a'_1 t'/e'_1{}^2$$

$$e_i = (a'_i/a'_1)^{1/2} (e'_i/e'_1); \quad t_i = a'_1 t'_i/e'_1{}^2.$$

Soit le changement de fonction :

$$\theta_i(x_i, t) = T_i(x_i, t)/\Delta T; \quad \theta_{r,1} = T_{r,1}/\Delta T$$

où ΔT est un écart de température de référence qui sera précisé ultérieurement (Section 3.1).

L'équation indéfinie de la chaleur dans la tranche i s'écrit alors :

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2} \quad t > t_i; \quad 0 < x_i < e_i; \quad i = 1, n. \quad (1)$$

Soit la densité de flux réduite φ_i définie par :

$$\varphi_i = -\beta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i}$$

avec

$$\beta_i = (a'_1/a'_i)^{1/2} \lambda'_i/e'_i H'$$

Dans cette expression H' représente la conductance globale du mur en régime stationnaire :

$$H' = h'_1 h'_n / [h'_1 + h'_n + h'_1 h'_n \sum (e'_i/\lambda'_i)]. \quad (2)$$

Les conditions de continuité aux interfaces s'écrivent alors :

$$\theta_i(0, t) = \theta_{i-1}(e_{i-1}, t);$$

$$\varphi_i(0, t) = \varphi_{i-1}, t(e_{i-1}, t), \quad i = 2, n. \quad (3)$$

Les conditions aux limites extrêmes deviennent :

$$\varphi_1(0, t) + h_1 [\theta_1(0, t) - \theta_{r,1}] = 0;$$

$$\varphi_n(e_n, t) - h_n \theta_n(e_n, t) = 0 \quad (4)$$

où $h_1 = h'_1/H'$, $h_n = h'_n/H'$.

Enfin, la condition initiale s'écrit :

$$\theta_i(x_i, t_i) = \theta'_i(x_i). \quad (5)$$

L'introduction de la fonction

$$\Theta_i(x_i, t) = \theta_i(x_i, t) - s_i(x_i)$$

où $s_i(x_i)$ est la solution du problème stationnaire associé permet de se ramener à un problème avec conditions aux limites homogènes :

$$\Phi_1(0, t) + h_1 \Theta_1(0, t) = 0;$$

$$\Phi_n(e_n, t) - h_n \Theta_n(e_n, t) = 0$$

où l'on a posé

$$\Phi_i = -\beta_i \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i}.$$

La solution élémentaire dans la tranche i s'exprime alors par :

$$\Theta_{ik}(x_i, t) = e^{-\mu_k^2 t} (A_{ik} \cos(\mu_k x_i) + B_{ik} \sin(\mu_k x_i))$$

$$\Phi_{ik}(x_i, t) = \mu_k \beta_i e^{-\mu_k^2 t} (A_{ik} \sin(\mu_k x_i) - B_{ik} \cos(\mu_k x_i)).$$

Les conditions de compatibilité aux interfaces impliquent :

$$\begin{bmatrix} \Theta_{ik}(e_i, t) \\ \Phi_{ik}(e_i, t) \end{bmatrix} = [\Gamma_{i,k}] \begin{bmatrix} \Theta_{1k}(0, t) \\ \Phi_{1k}(0, t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

avec

$$[\Gamma_{i,k}] = \begin{bmatrix} \xi_{ik} & \eta_{ik} \\ \zeta_{ik} & \chi_{ik} \end{bmatrix} = \prod_i \begin{bmatrix} \cos \mu_k e_j & -\frac{\sin \mu_k e_j}{\mu_k \beta_j} \\ \mu_k \beta_j \sin \mu_k e_j & \cos \mu_k e_j \end{bmatrix} \quad (7)$$

et la vérification des conditions aux limites entraîne nécessairement :

$$h_n (\xi_{nk} - h_1 \eta_{nk}) = \zeta_{nk} - h_1 \chi_{nk}. \quad (8)$$

Les solutions de cette équation sont les valeurs propres μ_k du problème.

La solution

$$\Theta_i(x_i, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_{ik}(x_i, t) \quad (9)$$

vérifie alors l'équation (1), les conditions de continuité (2) et les conditions aux limites (3).

2.3. Vérification de la condition initiale

On peut encore, compte tenu de (2), (3), (5) et (6), écrire la solution élémentaire sous la forme:

$$\Theta_{ik}(x_i, t) = A_{1k} e^{-\mu_k^2 t} \left[Y_{i-1,k} \cos(\mu_k x_i) - Z_{i-1,k} \frac{\sin(\mu_k x_i)}{\mu_k \beta_i} \right]$$

expression dans laquelle on a:

$$Y_{i-1,k} = \xi_{i-1,k} - h_1 \eta_{i-1,k};$$

$$Z_{i-1,k} = \zeta_{i-1,k} - h_1 \chi_{i-1,k}$$

posons:

$$X_{i,k}(x_i) = Y_{i-1,k} \cos(\mu_k x_i) - Z_{i-1,k} \frac{\sin(\mu_k x_i)}{\mu_k \beta_i}$$

On peut montrer que:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^{e_i} X_{i,k}(x_i) X_{il}(x_i) dx_i = 0$$

si $k \neq l$.

Cette propriété d'orthogonalité permet, par développement de la condition initiale:

$$\Theta_i^j(x_i) = \theta_i^j(x_i) - s(x_i)$$

sur la base propre correspondante, de calculer les coefficients A_{1k} :

$$A_{1k} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^{e_i} \Theta_i^j(x_i) X_{i,k}(x_i) dx_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^{e_i} X_{i,k}^2(x_i) dx_i} \quad (10)$$

La solution du problème (1) associé aux conditions (2), (3), (4) est alors déterminée.

3. APPLICATION A L'ETUDE DE REGIMES DISCONTINUS

3.1. Définition du régime considéré

On se propose d'étudier le comportement thermique d'un ensemble composite soumis du côté de la face $x_1 = 0$ à une variation discontinue par créneaux de la température T_{x_1} alors que, de l'autre côté, T_{x_n} reste nulle dans le temps. Les conductances h'_1 et h'_n sont invariables. La Fig. 2 illustre l'alternance aperiodique de T_{x_1} entre T_N (valeur nominale) et T_V (valeur de veille):

$$T_{x_n} = T_N - (T_N - T_V) Y(t - t_{p+1}); \quad t_p < t < t_{p+2}$$

où $Y(t)$ est la fonction échelon de Heaviside. L'écart ΔT fixant l'échelle des températures réduites sera pris égal à $\Delta T = T_N - T_V$.

3.2. Calcul de la solution de rang p

Supposons la solution du problème de conduction connue jusqu'à l'instant t_p . La condition initiale de la

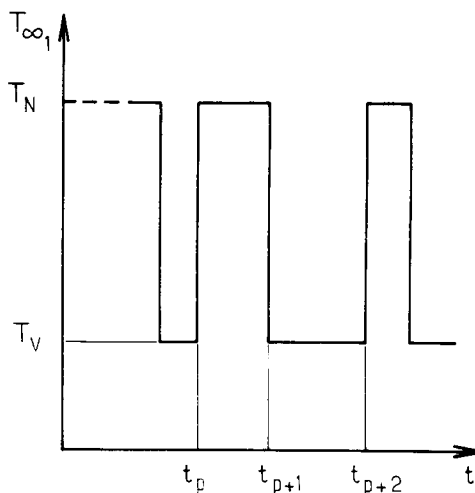


FIG. 2. Alternance aperiodique de la température loin de la face 1.

nouvelle séquence est alors:

$$\theta_i^p(x_i, t_p) = \Theta_i^{p-1}(x_i, t_p) + s_i^{p-1}(x_i).$$

Les conditions aux limites extrêmes du problème,

$$\theta_1^p(0, t) \quad \text{et} \quad \theta_n^p(e_n, t), \quad (t_p < t < t_{p+1}),$$

ne sont plus les mêmes que celles du problème antérieur ($t_{p-1} < t < t_p$), mais les conditions aux limites du problème homogène tel que:

$$\Theta_1^p(0, t) = \theta_1^p(0, t) - s_1^p(0);$$

$$\Theta_n^p(e_n, t) = \theta_n^p(e_n, t) - s_n^p(e_n)$$

n'ont pas changé (h_1 et h_n ne varient pas). Les valeurs propres μ_k resteront donc identiques quel que soit le rang de la solution.

Pour définir entièrement la température, il suffira donc de calculer les nouveaux coefficients A_{1k}^p en utilisant la condition initiale:

$$\Theta_i^j(x_i) = \Theta_i^{p-1}(x_i, t_p) + s_i^{p-1}(x_i) - s_i^p(x_i).$$

On vérifie que l'écart entre les solutions stationnaires de rang $p - 1$ et p s'écrit:

$$s_i^{p-1}(x_i) - s_i^p(x_i) = (-1)^{p-1} \left[\frac{x_i}{\beta_i} + \frac{1}{h_1} \sum_{j=1}^{i-1} (e_j/\beta_j) \right]$$

p pair correspondant à une reprise de marche nominale.

Les nouveaux coefficients A_{1k}^p seront alors définis par la somme:

$$A_{1k}^p = A_{1k}^{p-1} + (-1)^{p-1} A_{1k},$$

où l'expression des A_{1k} , indépendants du rang de la solution est donnée en annexe. Quant aux A_{1k}^p ils constituent les coefficients du développement de $\Theta_i^{p-1}(x_i, t_p)$ sur la base propre et donc:

$$\Theta_{ik}^{p-1}(x_i, t_p) = A_{1k}^{p-1} X_{i,k}(x_i).$$

Comme par ailleurs

$$\Theta_{ik}^{p-1}(x_i, t_p) = A_{1k}^{p-1} e^{-\mu_k^2 t_p} X_{i,k}(x_i),$$

on a simplement

$$A'_{1k} = A_{1k}^{-1} e^{-\mu_k^2 t_p}$$

La solution de rang p sera donc construite par récurrence et, en fin de compte, on obtiendra :

$$\Theta_i^p(x_i, t) = \Theta_i^1(x_i, t) + \sum_{k=1}^j A_k X_{i,k}(x_i) \sum_{j=2}^p (-1)^{j-1} e^{-\mu_k^2(t-t_j)} \quad (11)$$

expression valide tant que $t_p < t$ avec

$$t_{j-1} < t_j \quad \forall 1 < j < p.$$

Il reste à définir le régime initial $\Theta_i^1(x_i, t)$. Dans le cas pratique considéré ici, il correspond à une remise en route, à température nominale, T_N après un arrêt d'une durée telle que les parois aient pu se refroidir totalement à $T_{\infty n}$ d'où :

$$\Theta_i^1(x_i, t) = -(1 + \theta_V) \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_{i,k}(x_i) e^{-\mu_k^2 t} \quad (12)$$

Toutes ces expressions se prêtent aisément au calcul automatique.

3.3. Calcul des énergies mises en jeu

Il est intéressant d'étudier l'évolution des énergies thermiques mises en jeu au cours d'une séquence entre les instants t_p et t ; on définit ainsi :

(i) l'énergie entrant par la face $x_1 = 0$

$$E_{t_p, t} = \int_{t_p}^t \varphi_1^p(0, \tau) d\tau,$$

(ii) l'énergie sortant par la face $x_n = e_n$ et irrémédiablement perdue

$$P_{t_p, t} = \int_{t_p}^t \varphi_n^p(e_n, \tau) d\tau,$$

(iii) l'énergie stockée

$$S_{t_p, t} = E_{t_p, t} - P_{t_p, t}$$

La grandeur $E_{t_p, t}$ est algébrique et elle peut donc être négative pendant certaines époques. Du point de vue de l'utilisateur, si $E_{t_p, t}$ est positive elle est une énergie fournie à la paroi.

En faisant apparaître les températures des faces extrêmes on a, par exemple :

$$\varphi_1^p(0, t) = -h_1 \Theta_1^p(0, t) - h_1 [s_1^p(0) - \theta_{\infty 1}]$$

Soit

$$\varphi_1^p(0, t) = -h_1 \Theta_1^p(0, t) + \varphi_{st}^p,$$

φ_{st}^p représente le flux traversant le mur pour le régime stationnaire associé à la séquence p ($t_p < t < t_{p+1}$).

Par ailleurs, compte tenu de (9) et de la dépendance exponentielle vis-à-vis du temps des expressions (11) et (12), on montre aisément que :

$$\int_{t_p}^t \Theta_1^p(0, \tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Theta_{1k}^p(0, t_p) - \Theta_{1k}^p(0, t)}{\mu_k^2}$$

Dès lors, on obtient :

$$E_{t_p, t} = h_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Theta_{1k}^p(0, t) - \Theta_{1k}^p(0, t_p)}{\mu_k^2} + \varphi_{st}^p \times (t - t_p)$$

De même,

$$P_{t_p, t} = h_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Theta_{nk}^p(e_n, t) - \Theta_{nk}^p(e_n, t_p)}{\mu_k^2} + \varphi_{st}^p \times (t - t_p)$$

Ces expressions conviennent également au calcul automatique. Ici apparaît l'avantage de cette méthode analytique qui ne nécessite pas une connaissance complète des champs de température pour accéder aux flux et aux énergies.

4. CAS D'UNE ALTERNANCE PERIODIQUE DE $T_{\infty 1}$

4.1. Description

L'étude qui suit concerne une évolution cyclique de $T_{\infty 1}$, avec une période \mathcal{E} et un facteur γ d'alternance (ou d'intermittence); ce dernier est la fraction de période durant laquelle on impose la température nominale T_N . Ainsi, sur la période, $t_p < t < t_p + \mathcal{E}$, la variation de $T_{\infty 1}$ s'exprime par

$$T_{\infty 1} = T_N - (T_N - T_V) Y[t - (t_p + \gamma \mathcal{E})].$$

On note par ailleurs que la température moyenne de $T_{\infty 1}$ est, pour cette période :

$$\bar{T}_{\infty 1} = \gamma T_N + (1 - \gamma) T_V \quad (13)$$

Ce cas simule le fonctionnement d'un four en alternance de chauffe et de veille par campagnes de postes de travail. Dans la suite, on a pris $\mathcal{E} = 24$ h avec une phase nominale de 15 h et une phase de veille égale à 9 h, ce qui correspond à $\gamma = 0,625$.

Initialement, le mur est à la température uniforme égale à $T_{\infty n} = 0$.

Les formules précédentes ont été programmées en langage Fortran sur un minicalcateur. Le calcul des valeurs propres (7) et (8) est réalisé avec une précision relative de 10^{-6} par la méthode de Newton alliée à une dichotomie.

4.2. Types de murs étudiés

On présente ici les résultats relatifs à deux types de murs de même résistance thermique résultante $\sum(e_i/\lambda_i) = 1,7965 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$ et possédant trois tranches. L'un désigné par (Γ) ne comprend qu'une couche fibreuse C tandis que l'autre (Λ) est uniquement composé de couches en fibres céramiques. Les caractéristiques de ces murs, déduites des données pratiques de catalogues, sont résumées dans le Tableau 1.

Les capacités thermiques $\sum(\rho_i c_i e_i)$ sont égales à 147,1 et 146,5 kJ/m² · K respectivement pour les murs (Γ) et (Λ) et elles sont donc très proches.

La conductance surfacique de la face externe n est toujours prise égale à $h'_n = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$; celle h'_1 de la face interne possède différentes valeurs suivant les cas, soit 40 W/m² · K, soit 80 W/m² · K.

4.3. Disposition traditionnelle

Les différentes tranches sont, de l'intérieur vers

Tableau 1

	* Mur (Γ)			* Mur léger (Λ)		
	A	B	C	A'	B'	C'
e_i (m)	0,115	0,11	0,06	0,025	0,075	0,06
λ_i (W/m·K)	0,26	0,16	0,09	0,13	0,08	0,09
ρ_i (kg/m ³)	500	350	144	128	96	144
a_i (m ² /s)	$5,1 \cdot 10^{-7}$	$5,1 \cdot 10^{-7}$	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}

* Dans la disposition usuelle, les tranches C et C' sont situées vers l'extérieur du four.

l'extérieur, dans l'ordre indiqué dans le Tableau 1.

(a) Sur la Fig. 3 sont tracées les évolutions des températures sur les faces interne (a) et externe (b) du mur léger (Λ) pour deux valeurs— $40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ (courbes en traits pleins) et $80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ (courbes en pointillés)—de la conductance surfacique h'_1 de la face interne. Considérant la face externe on note que le régime périodique s'y installe pratiquement au bout de 45 h indépendamment de la valeur de h'_1 ; les températures réelles oscillent alors entre 25 et 38°C (au-dessus de l'ambiante) sans que la variation envisagée (100%) de la conductance h'_1 ait un net effet sur ces extrêmes (par exemple 0,5% sur la température maximale). On constate que ces températures atteignent leurs valeurs extrêmes avec un retard qui, mesuré par rapport aux instants où sont imposées les modifications de régime, est de 18 h pour la valeur maximale et de 13 h pour la valeur minimale.

Sur la face interne, l'effet de variation de la conduc-

tance h'_1 est plus marqué. Il influence la durée d'établissement du régime périodique qui de 45 h environ pour $h'_1 = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ passe à 17 h pour $h'_1 = 80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. De même, les dates (repérées par des flèches) où la face atteint, à 1% près, la température correspondant au régime stationnaire, $s_1^m(0)$, sont grandement influencées par la variation de conductance h'_1 . Si l'on mesure le retard de ces dates par rapport à l'instant où la température nominale est imposée, on trouve 9 h lors de la première montée de température, 6 h pour la seconde et 5 h environ pour les suivantes et ceci pour la plus petite conductance surfacique ($40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$). Les retards homologues deviennent 5 h pour le premier et se fixent ensuite à 3 h environ quand h'_1 vaut $80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. Pour le cas où $h'_1 = 80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, cette moindre inertie est à considérer avec le fait que la température stationnaire de la face I est plus élevée: 795°C au lieu de $789,5^\circ\text{C}$ lorsque $h'_1 = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

L'évolution des températures sur les faces extrêmes

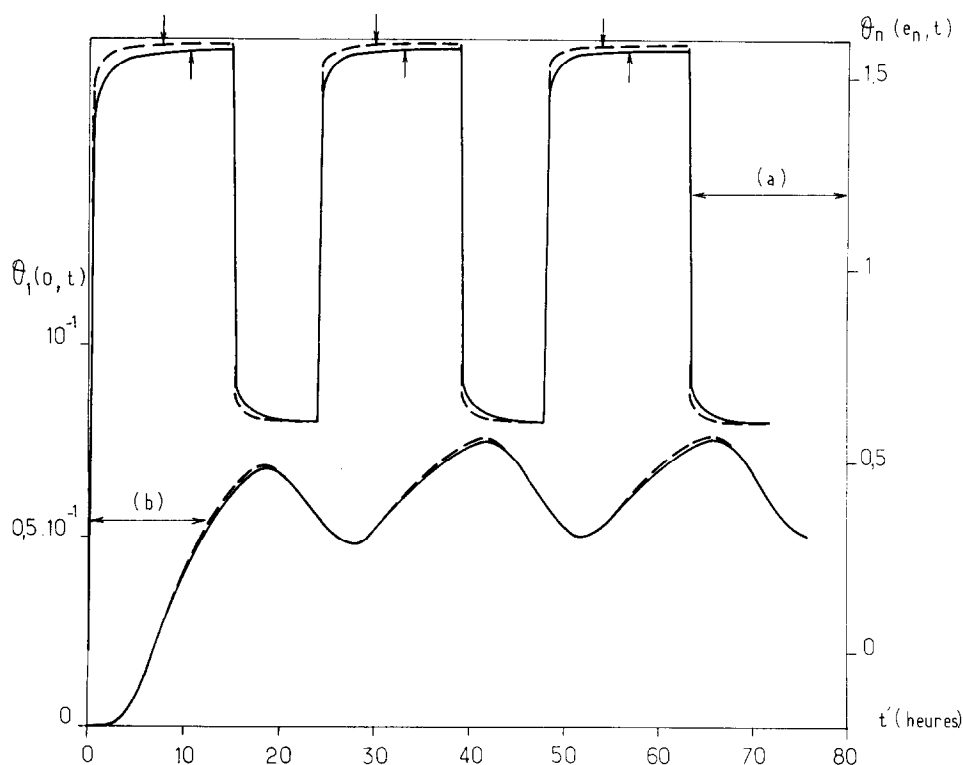


FIG. 3. Températures réduites sur les faces extrêmes. Mur léger (Λ)—A'B'C'. $T_V = 300^\circ\text{C}$; $T_N = 800^\circ\text{C}$; $h'_n = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. — $h'_1 = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$; --- $h'_1 = 80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

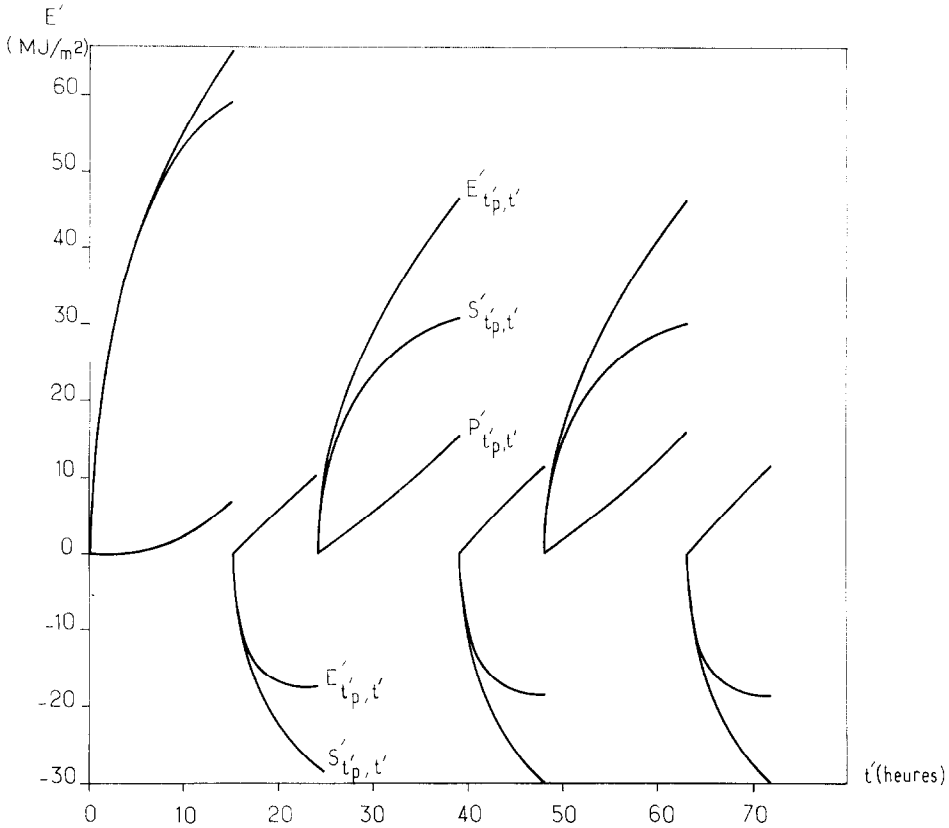


Fig. 4. Energies mises en jeu, séquence par séquence. Mur léger (Λ)-A'B'C'. $T_V = 300^\circ\text{C}$; $T_N = 800^\circ\text{C}$; $h'_i = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$; $h'_n = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

Tableau 2. Energies cumulées

t' (h)	Entrante [†]		E' (MJ/m ²) Sortante		Stockée	
	(Λ)	(Γ)	(Λ)	(Γ)	(Λ)	(Γ)
15	65,7 (5)	67,2 (5)	6,8	6,7 (5)	58,9 (5)	60,5
24	48,3 (5)	49,5 (5)	17,1 (5)	17,2	31,2	32,3 (5)
48	76,3 (5)	77,5 (5)	44,2 (5)	44,3 (5)	32,1	33,2
72	103,9	105,1	71,8	71,9	32,1	33,2
87	150,0	151,6	87,8	87,9	62,2	63,7

[†]Cette énergie est cumulée algébriquement comme les autres. L'existence de phase à énergie entrante négative (Fig. 4) fait que le cumul est sans relation avec l'énergie effectivement apportée par le système de chauffage du four. Seul est considéré le bilan du mur et non celui du four.

du mur (Γ) ne présente pas de différence sensible avec celle du mur entièrement fibreux (Λ). Rappelons que les deux murs ont même conductance globale.

(b) L'évolution des énergies séquence par séquence est représentée sur la Fig. 4 (mur léger Λ) pour la seule valeur de conductance $h'_i = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. Pendant la première des séquences de montée en température ($0 < t' < 15 \text{ h}$) est fournie une énergie qui est stockée, pour l'essentiel. La perte relativement faible en fin de cette phase, atteint $6,80 \text{ MJ/m}^2$ pour le

mur léger (Λ) et $6,77 \text{ MJ/m}^2$ pour (Γ); cette dernière valeur a pour origine une meilleure aptitude au stockage de ce mur. Au cours des phases suivantes apparaît l'alternance entre les énergies stockées et destockées qui deviennent égales lorsque le régime périodique est établi; le même type d'alternance se produit pour l'énergie entrante avec cependant un excès d'énergie, en phase de réchauffement, qui compense la perte supérieure au cours de cette phase; il y a donc déséquilibre pour cette énergie entre les phases de veille et de marche normale. On remarquera la quasi-linéarité des pertes au cours du temps à partir de la date $t' = 15 \text{ h}$, la puissance moyenne perdue en régime de veille ($355,7 \text{ W/m}^2$)* étant supérieure à celle perdue en régime nominal ($296,5 \text{ W/m}^2$)* dès que le phénomène est devenu périodique. Les écarts d'un

* Il existe en fait un écart entre les deux types de murs mais très faible puisque de 0,26% en phase de veille (en faveur de (Λ)) et de 0,12% en phase nominale (en faveur de (Γ)).

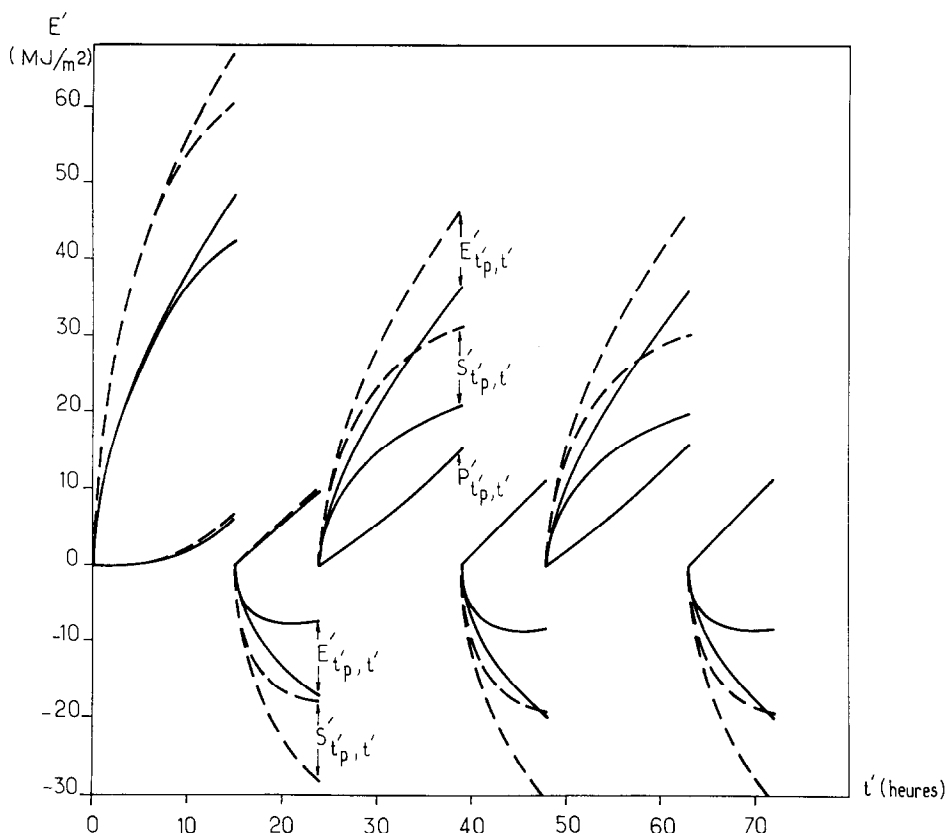


FIG. 5. Energies mises en jeu, séquence par séquence. Mur (Γ). $h'_1 = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$; $h'_n = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.
 — Disposition *BCA*; --- Disposition *ABC*.

type de mur à l'autre restent faibles; l'avantage pour les énergies fournies revient au mur (Λ) qui stocke moins. Cet avantage, acquis dès la première mise en marche, est confirmé si on cumule les différentes énergies sur plusieurs périodes comme le montre le Tableau 2.

Un doublement de la conductance surfacique h'_1 provoque une augmentation de moins de 1% des niveaux d'énergie mise en jeu, valeur faible mais supérieure cependant à l'augmentation relative correspondant de la conductance globale H' (cf. (2)).

4.4. Effet de la disposition relative des tranches

Les matériaux fibreux étant capables de supporter des températures élevées, il nous a semblé intéressant d'examiner l'influence des permutations des tranches dans les deux murs. Les six dispositions possibles dans chaque mur ont été étudiées en conservant les niveaux $T_V = 300^\circ\text{C}$ et $T_N = 800^\circ\text{C}$ du paragraphe précédent.

Pour ce qui est des températures des faces extrêmes, il n'a pas été noté de phénomène très spectaculaire: les permutations altèrent légèrement les amplitudes. Par exemple, sur la face externe la température maximale en régime périodique peut varier de 37 à 38°C (au-dessus de l'ambiante); une telle différence, bien que très faible, est cependant à l'origine de modifications des niveaux d'énergie mise en jeu. En effet, sur les énergies fournies et stockées peuvent être notées des variations atteignant presque 50% pour les valeurs en fin de première phase.

Sur la Fig. 5 sont représentées en traits pointillés les

énergies mises en jeu pour le mur (Γ) dans la disposition *ABC* du Tableau 1 et en traits pleins apparaissent les courbes homologues dans le cas d'un mur (Γ) dont les tranches sont disposées dans l'ordre *BCA* (de l'intérieur vers l'extérieur). Cette dernière disposition est optimale sous l'angle des énergies cumulées entrantes et stockées. On note un changement spectaculaire non seulement par rapport au mur (Γ)–*ABC* mais aussi par rapport au mur entièrement en fibres céramiques (Λ)–*A'B'C'* (Fig. 4). Ainsi, dans la première séquence ne sont plus fournis que $48,66 \text{ MJ/m}^2$ (au lieu de $67,26 \text{ MJ/m}^2$ pour Γ –*ABC*) et sont perdus $6,1 \text{ MJ/m}^2$ (à comparer à $6,77 \text{ MJ/m}^2$); le stockage est également moindre ($42,57 \text{ MJ/m}^2$ au lieu de $60,49 \text{ MJ/m}^2$). Etant donné que cette première phase est déterminante pour la suite, il est naturel que ces gains se retrouvent sur les énergies cumulées. Au bout de 87 h ces dernières se répartissent comme suit:

Entrante	Sortante	Stockée
133 MJ/m^2	86,35 MJ/m^2	46,65 MJ/m^2

Ces valeurs sont à rapprocher de celles figurant à la dernière ligne du Tableau 2.

On notera enfin que cette disposition *BCA* conduit à des énergies fournies (énergies entrantes positives) très inférieures à celles observées pour les murs (Γ)–*ABC* et (Λ)–*A'B'C'* (Fig. 4). Les courbes $P'_{t_p, t'}$ de cette Fig. 5 deviennent indiscernables pour les deux types de murs dès que le régime périodique s'établit.

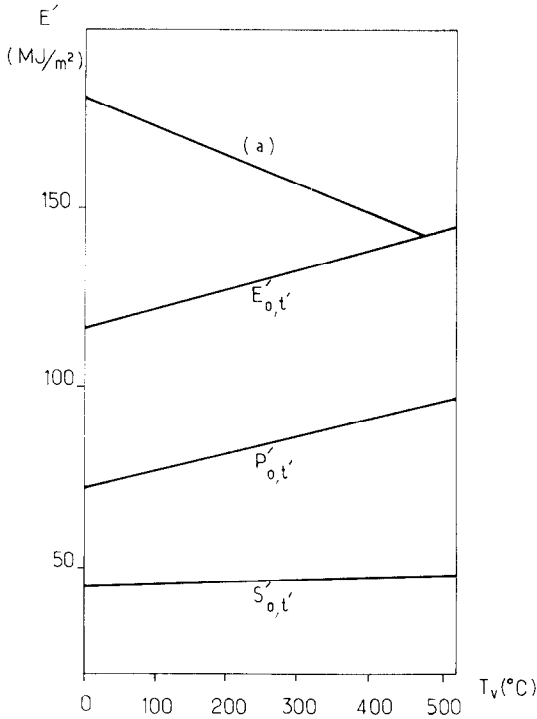


FIG. 6. Energies cumulées à la date $t' = 87$ h. Mur (Γ) -BCA. $T_N = 800^\circ\text{C}$; $h'_1 = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$; $h'_n = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

4.5. Régime périodique établi

Si l'on s'intéresse uniquement au régime périodique établi et plus particulièrement à la prévision des énergies mises en jeu sur une période ($\mathcal{E} = 24$ h), on notera qu'il est inutile de développer un calcul en instationnaire. En effet, la température moyenne sur une période obéit à une équation de régime stationnaire et si les conditions aux limites du problème sont linéaires, comme c'est ici le cas, on pourra aisément définir les conditions aux limites moyennes associées. Ainsi, pour les cas étudiés où les conductances surfaciques des faces extrêmes sont indépendantes du temps, le régime moyen est celui qu'on observerait en maintenant la température loin de la face interne à la valeur $\bar{T}_{\infty 1}$ (12) c'est à dire $612,5^\circ\text{C}$. Il semble que cette propriété n'ait pas été bien vue, jusqu'à présent du moins, pour les murs composites.

On vérifie les conséquences de ces remarques. L'énergie moyenne perdue sur un cycle de 24 h est égale à l'énergie entrante ($27,54 \text{ MJ/m}^2$ pour $h'_1 = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$) et h'_1 et h'_n étant fixés, est la même pour les deux types de murs indépendamment de la combinaison entre A, B, C ou A', B', C' (les conductances globales étant invariables). L'énergie moyenne stockée sur 24 h est évidemment nulle. Pour clore ce paragraphe, notons que la connaissance de ces propriétés moyennes ne permet pas de prédire le comportement du mur séquence par séquence.

4.6. Influence de la température de veille

Si au cours de la première phase de montée en température (à partir de zéro), le bilan énergétique

d'une disposition donnée est évidemment indépendant de la température de veille, il n'en est pas de même au cours des phases suivantes où l'influence de l'écart ΔT entre température nominale et température de veille se combine à l'effet d'inertie thermique du mur. On peut alors s'interroger sur l'existence d'une température particulière permettant d'optimiser les énergies.

On a tracé, sur la Fig. 6, les énergies cumulées au cours des premières 87 h en fonction de la température de veille pour la disposition des tranches du paragraphe 4.4, c'est à dire BCA . On constate qu'à cette date la corrélation est linéaire; l'optimum énergétique du mur correspond alors à $T_V = 0^\circ\text{C}$. Il est peu probable (voir note du Tableau 2) que cet optimum coïncide avec celui du four car le flux sortant par la face interne a peu de chance d'être réutilisé; c'est pourquoi, nous plaçant dans l'hypothèse où l'énergie transitant par cette face ne peut être récupérée, nous avons tracé la droite (a) représentant le cumul de l'énergie fournie (phases de montée à température nominale tant que $T_V \leq 400^\circ\text{C}$). Cette droite à pente négative coupe celle correspondant à l'énergie entrante en un point d'abscisse $T_V = 480^\circ\text{C}$ environ. Cette température particulière optimise le fonctionnement (simplifié) du four pour ce qui est de l'énergie fournie et pour la disposition étudiée.

5. CONCLUSION

La méthode analytique utilisée conduit au calcul aisé des températures et — ce qui est plus utile en pratique — des flux de chaleur en régime variable, quel que soit le nombre des tranches qui composent le mur. Comme dans le cas du mur homogène, cette méthode nécessite un nombre de valeurs propres d'autant plus élevé que les instants considérés sont proches de l'époque d'un changement de la température $T_{\infty 1}$. Il s'agit en fait d'un inconvénient mineur lié, on le sait, aux discontinuités des conditions aux limites inhérentes à toute modélisation mathématique de régimes transitoires; les méthodes purement numériques rencontrent la même difficulté qu'elles surmontent par une augmentation du nombre de pas de calcul pour les instants courts.

L'étude a porté sur deux types de murs composites ayant des résistances thermiques globales; elle a montré qu'il est possible de déterminer une disposition optimale des tranches élémentaires et aussi des conditions de fonctionnement qui réduisent les pertes de chaleur. En particulier, on constate que les murs entièrement en fibres céramiques ne sont pas systématiquement les plus performants. Ceci doit inviter les ingénieurs à réviser une opinion assez répandue selon laquelle les murs en fibres céramiques sont systématiquement meilleurs sous l'angle de l'économie d'énergie.

Une telle analyse est facile à mettre en oeuvre dans des cas pratiques autres que celui traité ici.

Cet article est dédié à la mémoire du professeur E. A. Brun qui avait marqué son intérêt pour la Note [1] et qui souhaitait la publication d'un exemple illustratif.

REFERENCE

1. J. Gosse, Sur la condition thermique variable dans un mur composite à propriétés constantes, *C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris* **B286**, 303-306 (1978).

ANNEXE

Expression des Coefficients A_k

On a $A_k = K_k/I_k$

avec

$$K_k = \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^{e_i} \left(\frac{x_i}{\beta_i} + \frac{1}{h_1} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{e_j}{\beta_j} \right) \times \left(Y_{i-1,k} \cos(\mu_k x_i) - \frac{Z_{i-1,k}}{\mu_k \beta_i} \sin(\mu_k x_i) \right) dx_i$$

et

$$I_k = \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^{e_i} \left(Y_{i-1,k}^2 \cos^2(\mu_k x_i) + \frac{Z_{i-1,k}^2}{\mu_k^2 \beta_i^2} \times \sin^2(\mu_k x_i) - \frac{2Y_{i-1,k} Z_{i-1,k}}{\mu_k \beta_i} \sin(\mu_k x_i) \cos(\mu_k x_i) \right) dx_i$$

Le calcul des intégrales ne présente aucune difficulté particulière. Les expressions obtenues peuvent être considé-

ralement simplifiées compte tenu des relations de récurrence:

$$Y_{i,k} = Y_{i-1,k} \cos \mu_k e_i - Z_{i-1,k} \frac{\sin \mu_k e_i}{\mu_k \beta_i}$$

$$Z_{i,k} = Z_{i-1,k} \cos \mu_k e_i + Y_{i-1,k} \mu_k \beta_i \sin \mu_k e_i$$

qui permettent de résoudre quelques sommations sur l'indice i .

Tous calculs intermédiaires faits, on obtient:

$$K_k = \frac{1}{\mu_k^2} \left[1 + Z_{n,k} \left(\frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\beta_i} \right) + Y_{n,k} - Y_{0,k} \right]$$

$$I_k = \frac{1}{2\mu_k^2} \left[Y_{n,k} Z_{n,k} + h_1 + \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\beta_i} (Y_{i-1,k}^2 \mu_k^2 \beta_i^2 + Z_{i-1,k}^2) \right]$$

avec

$$Y_{n,k} = \zeta_{nk} - h_1 \eta_{nk}; \quad Z_{n,k} = \zeta_{n,k} - h_1 \chi_{nk}; \quad Y_{0,k} = 1.$$

Soit:

$$A_k = 2 \frac{Y_{n,k} + Z_{n,k} \left(\frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\beta_i} \right)}{Y_{n,k} Z_{n,k} + h_1 + \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\beta_i} (Y_{i-1,k}^2 \mu_k^2 \beta_i^2 + Z_{i-1,k}^2)}$$

THERMAL ANALYSIS FOR A COMPOSITE WALL HAVING ONE SURFACE SUBJECT TO A CRELATED VARIATION OF THE AMBIENT TEMPERATURE

Abstract — An analytical method [1] improves the separation of variables technique to solve the problem of transient heat conduction in a composite wall with constant properties; each eigenvalue is the same for all slabs in the wall. The case of an intermittent working of a furnace is considered with two types of wall. Those walls have the same overall thermal resistance and practically the same overall thermal capacitance. One of them is completely made of ceramic fibers. For each wall the influence of the arrangement of the different slabs between the hot and cold surfaces on the heat fluxes which pass through them is considered. It is said that the ceramic fibers wall is not the best to spare energy.

THERMISCHE ANALYSE FÜR EINE MEHRSCHICHTIGE WAND WOBEI EINE OBERFLÄCHE EINER SCHIESSCHARTENFÖRMIGEN VARIATION DER UMGEBUNGSTEMPERATUR UNTERLIEGT

Zusammenfassung — Eine analytische Methode [1] verbessert die Technik der Separation der Variablen, um das Problem der transienten Wärmeleitung in einer zusammengesetzten Wand mit konstanten Eigenschaften zu lösen. Dabei ist jeder Eigenwert für alle Wandschichten der gleiche. Diese Wände haben denselben thermischen Widerstand und praktisch dieselbe Wärmekapazität. Eine Wand besteht vollständig aus keramischen Fasern. Für jede Wand wird der Einfluß der Anordnung der verschiedenen Schichten zwischen der heißen und der kalten Oberfläche auf den Wärmestrom betrachtet. Die Wand aus keramischen Fasern ist angeblich nicht die beste zur Energieeinsparung.

ТЕРМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОСТАВНОЙ СТЕНКИ ПРИ СКАЧКООБРАЗНОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА ОДНОЙ ИЗ ЕЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Аннотация — С помощью аналитического метода, предложенного в работе [1], усовершенствована методика разделения переменных при решении задачи нестационарной передачи тепла теплопроводностью в составной стенке с постоянными теплофизическими свойствами; каждое собственное значение является одинаковым для всех слоев стенки. Рассматривается случай работы печи в циклическом режиме с двумя типами стенок, имеющих одинаковое суммарное термическое сопротивление и практически ту же суммарную теплоемкость. Одна из стенок изготовлена полностью из керамических волокон. Для каждого типа стенок рассматривается влияние взаимного расположения слоев между нагреваемой и холодной поверхностями на проходящий через них тепловой поток. Показано, что стенка из керамических волокон не является наиболее выгодной с точки зрения экономии энергии.